Abbildungen

2. Teil:

Streckungen

von Punkten und Kurven

Datei Nr. 21020

Stand: 8. August 2012

FRIEDRICH W. BUCKEL

INTERNETBIBLIOTHEK FÜR SCHULMATHEMATIK

www.mathe-cd.de

Vorwort

Hier werden Streckung in y-Richtung, in x-Richtung, zentrische Streckung (in x- und y-Richtung gleich stark) und um die Euler-Affinität, bei der in x-Richtung und in y-Richtung verschieden stark gestreckt wird, so weit besprochen, dass man ihre Abbildungsgleichungen kennt, Bildpunkte berechnen und die Gleichung von Bildkurven berechnen kann.

Konstruktionen von Bildpunkten und Bildgeraden werden ebenfalls gezeigt und eingeübt.

Fixgeraden werden nicht behandelt (in einem Beispiel kommt eine vor). Es geht hier nicht um die große Theorie der Abbildungen.

Im Text 21010 werden Verschiebungen behandelt. Dort wird auch gezeigt, warum man Abbildungsgleichungen umstellen muss, wenn man Kurven abbilden will.

Hinweise zu weiterführenden Texten findet man an den geeigneten Stellen.

Schreibweisen: Unter (AB) verstehe ich die Gerade durch A und B.
AB ist eine Strecke und
$\overline{AB}$ die Länge dieser Strecke.

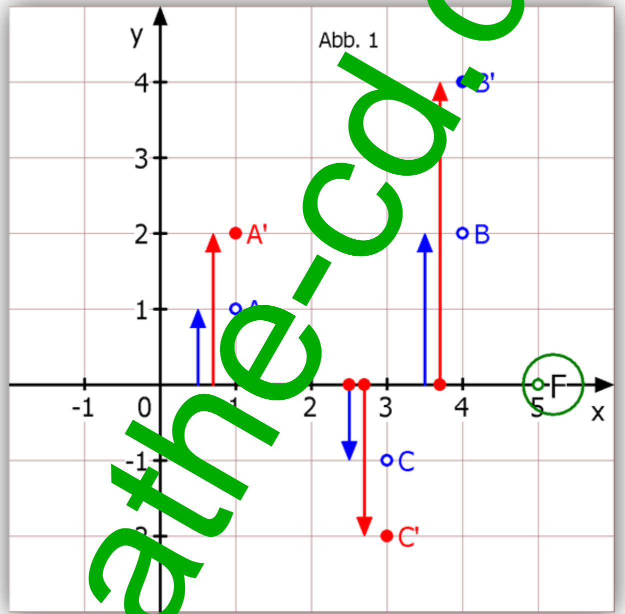
Die Abbildungen wurde alle mit dem Programm **Mathegrafix** von Roland Hammes erstellt.
(www.mathegrafix.de)

Die Dateien zu diesen Abbildungen finden Sie im Ordner Mathegrafiken auf der Mathe-CD als Zip-Archiv mit der Nummer 21020 (zum Lernen, wie man sie erstellt bzw. zur weiteren Verarbeitung).

Inhalt

1 Streckung in y-Richtung oder in x-Richtung: Punkte

1.1 Streckung in y-Richtung



Der Begriff ist verwirrend! Punkte kann man im eigentlichen Sinn ja nicht strecken, denn das bedeutet ja eine Verlängerung. Punkte kann man nicht verlängern. Wir wollen ihre Lage verändern.

Wenn man also von einer Streckung in x-Richtung spricht, dann meine man die Streckung einer Strecke. Und zwar denke man sich von den Punkten A, B und C das Lot zur x-Achse gefällt. Diese Strecke wird mit einem Faktor k (hier ist k = 2) vergrößert. Das bedeutet, dass der Streckenanfangspunkt, den wir uns auf der x-Achse denken, fest bleibt, dann rückt der Endpunkt also A, B oder C auf den doppelten Abstand von der Achse weg. Ich habe dies durch Pfeile angedeutet, die ich allerdings links neben diese gedachte Strecke gezeichnet habe.

Der blaue Pfeil wird auf die doppelte Länge gedehnt und so zum roten Pfeil, aus A wird A', aus B wird B' und aus C wird C'. Punkte auf der x-Achse (Streckungsachse) verändern ihre Lage nicht, sie heißen Fixpunkte. F ist ein Fixpunkt.

Und das passiert bei der dargestellten Streckung:

$A(1|1) \xrightarrow{y\text{-Str.}} A'(1|2)$

$B(4|2) \xrightarrow{y\text{-Str.}} B'(4|4)$

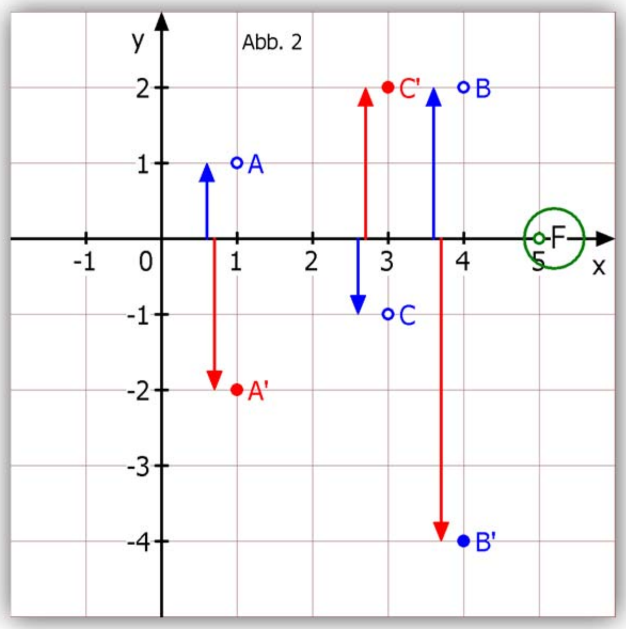
$C(3|-1) \xrightarrow{y\text{-Str.}} C'(3|-2)$

$F(5|0) \xrightarrow{y\text{-Str.}} F'(5|0) = F$

Allgemein: $P(x|y) \xrightarrow{y\text{-Str.}} P'(x|2y)$

Wir haben somit diese **Streckungsgleichungen** $\begin{Bmatrix} x' = x \\ y' = 2y \end{Bmatrix}$, allgemein: $\begin{Bmatrix} x' = x \\ y' = ky \end{Bmatrix}$

Im oberen Beispiel war **k = 2** ein **positiver Streckfaktor**. Jetzt sehen wir in Abb. 2 die Wirkung eines **negativen** Streckfaktors: **k = -2**.



Die von der x-Achse zu den Punkten A, B, C gehenden Strecken werden auch in ihrer Länge verdoppelt, aber zugleich werden die Punkte an der x-Achse gespiegelt. Dies machen jetzt auch die Pfeile sehr schön sichtbar.

$A(1|1) \xrightarrow{y\text{-Str.}} A'(1|-2)$

$B(4|2) \xrightarrow{y\text{-Str.}} B'(4|-4)$

$C(3|-1) \xrightarrow{y\text{-Str.}} C'(3|-2)$

$F(5|0) \xrightarrow{y\text{-Str.}} F'(5|0) = F$,

allg.: $P(x|y) \xrightarrow{y\text{-Str.}} P'(x|-2y)$

Die Streckungsgleichungen sind immer noch gleich: $\begin{Bmatrix} x' = x \\ y' = ky \end{Bmatrix}$ nur wenn man k = -2 einsetzt, erkennt man den Unterschied: $\begin{Bmatrix} x' = x \\ y' = -2y \end{Bmatrix}$.

1.2 Streckung in x-Richtung

Abb. 3 zeigt diese Streckung:

$A(4\,|\,2) \xrightarrow{\text{x-Str.}} A'(8\,|\,2)$

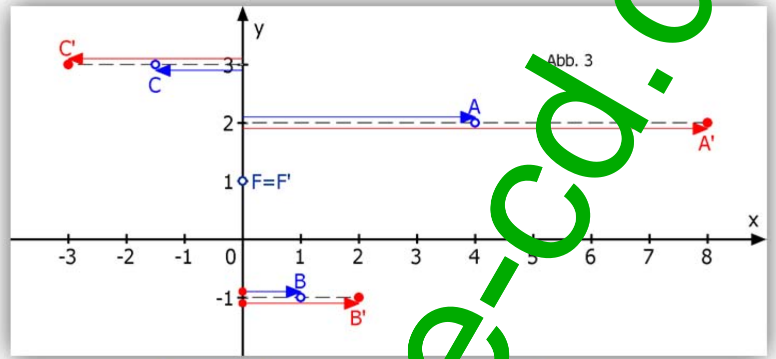
$B(1\,|\,-1) \xrightarrow{\text{x-Str.}} B'(2\,|\,-1)$

$C(-\tfrac{3}{2}\,|\,3) \xrightarrow{\text{x-Str.}} C'(-3\,|\,3)$

$F(0\,|\,1) \xrightarrow{\text{x-Str.}} F'(0\,|\,1) = F$

Allgemein:

$P(x\,|\,y) \xrightarrow{\text{x-Str.}} P'(2x\,|\,y)$



Wir haben somit diese **Streckungsgleichungen** $\left\{\begin{matrix} x' = 2x \\ y' = y \end{matrix}\right\}$, allgemein: $\left\{\begin{matrix} x' = kx \\ y' = y \end{matrix}\right\}$

Die nächste Streckung hat die Streckungsgleichungen $\left\{\begin{matrix} x' = -\tfrac{2}{3}x \\ y' = y \end{matrix}\right\}$

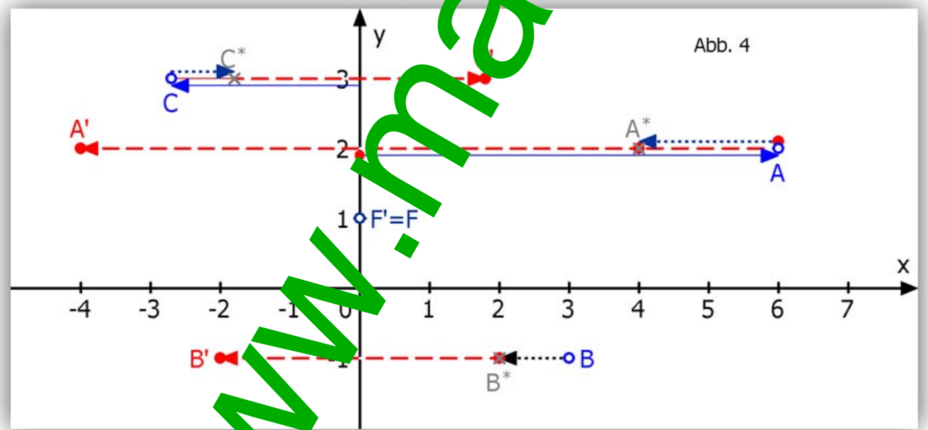
Der Streckfaktor ist

$k = -\tfrac{2}{3}$.

k ist also negativ

und dem Betrag nach zwischen 0 und 1:

$0 < |k| < 1$



Die Streckung bewirkt:

$A(6\,|\,2) \xrightarrow{\text{x-Str.}} (4\,|\,2) \xrightarrow{\text{Spiegelung}} A'(-4\,|\,2)$

$B(3\,|\,-1) \xrightarrow{\text{x-Str.}} (2\,|\,-1) \xrightarrow{\text{Spiegelung}} B'(-2\,|\,-1)$

$C(-2{,}7\,|\,3) \xrightarrow{\text{x-Str.}} (-1{,}8\,|\,3) \xrightarrow{\text{Spiegelung}} C'(1{,}8\,|\,3)$

$F(0\,|\,1) \xrightarrow{\text{x-Str.}} F'(0\,|\,1) = F$ (Fixpunkt auf der Streckachse.)

Diese Streckung kann man in <u>zwei Teilabbildungen</u> splitten:

$P(x\,|\,y) \xrightarrow{\text{x-Str.}} (|k|\cdot x\,|\,y) \xrightarrow{\text{Spiegelung}} P'(kx\,|\,y)$

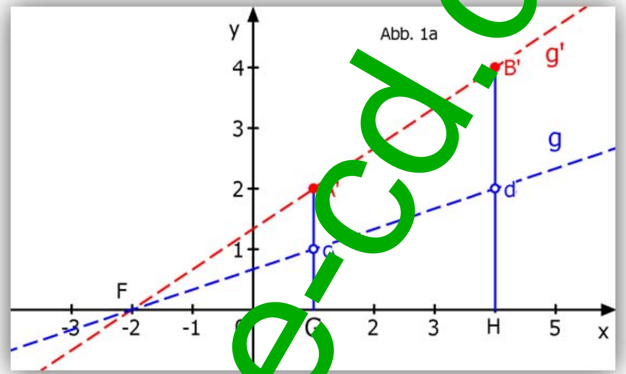
Der 1. Schritt ist eine Streckung mit dem Faktor $|k| = \tfrac{2}{3}$. Dabei werden die Strecken von der y-Achse bis zum Urbild um den Faktor $\tfrac{2}{3}$ verkürzt, weshalb man dazu auch Stauchung sagen kann. Der Zwischenpunkt rückt also näher an die Streckachse heran. (In Abb. 4 ist der Zwischenpunkt von A nach A' durch ein x gekennzeichnet: A*.)

Der 2. Schritt zeigt die Wirkung des Minuszeichens, die einfach das Vorzeichen der x-Koordinate ändert, was einer Spiegelung an der y-Achse gleich kommt (roter Bildpunkt). (In Abb. 4 wird diese Spiegelung durch einen gestrichelten roten Pfeil angedeutet: Von A* nach A' bzw. von C* nach C'.)

1.3 Konstruktive Lösungen

(mehr dazu im Text 23111)

Ich zeige die erweiterte Abbildung 1.



Hier wurden die Urbilder A und B zu einer Geraden g verbunden, und ebenso die Bildpunkte A' und B' zu einer Geraden g'. Sie ist die Bildgerade von g.
Beide Geraden schneiden sich auf der x-Achse in einem Punkt F, der Fixpunkt ist, weil er bei Streckung (hier mit k = 2) auf sich selbst abgebildet wird.

Die ganze Darstellung ist eine **Strahlensatzfigur**.

1. Die x-Achse und g werden von zwei vertikalen Parallelen geschnitten. Der 2. Strahlensatz liefert hier die Gleichung:

$$\frac{\overline{GA}}{\overline{HB}} = \frac{\overline{FG}}{\overline{FH}}, \text{ d.h. } \frac{y_A}{y_B} = \frac{\overline{FG}}{\overline{FH}} \qquad (1)$$

2. Die x-Achse und g' werden ebenso von zwei vertikalen Parallelen geschnitten. Der 2. Strahlensatz liefert hier die Gleichung:

$$\frac{\overline{GA'}}{\overline{HB'}} = \frac{\overline{FG}}{\overline{FH}}, \text{ d.h. } \frac{y_{A'}}{y_{B'}} = \frac{\overline{FG}}{\overline{FH}} \qquad (2)$$

Weil in (1) und (2) die rechten Seiten übereinstimmen, gilt dies auch für die linken Seiten:

$$\frac{y_A}{y_B} = \frac{y_{A'}}{y_{B'}}$$

Oder durch Umstellung:

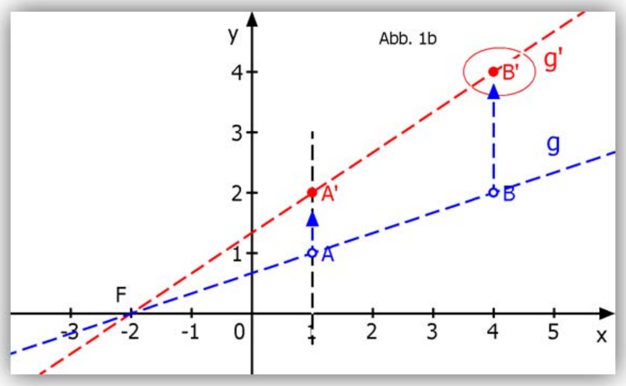
$$\frac{y_{B'}}{y_B} = \frac{y_{A'}}{y_A} \; (= k) \qquad (3)$$

Das Verhältnis der y-Koordinaten von Bildpunkt zu Urbild ist gerade der Streckfaktor.

Dies zeigt den direkten Zusammenhang zwischen Achsenstreckung und Strahlensatz. Sie gehören immer zusammen!

Konstruktionsbeispiel (1) (Abb. 1b)

Gegeben sind das Punktepaar A und A' sowie das Urbild B. Konstruiere den Bildpunkt B'.



Konstruktionstext:

(1) Verbinde die Urbilder A und B zur Geraden g.

(2) g schneidet die Streckachse im Fixpunkt F.

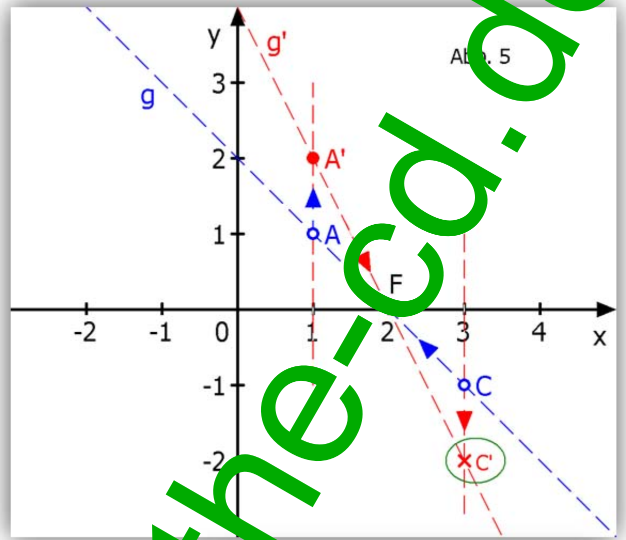
(3) Verbinde F und A' zur Bildgeraden g' von g.

(4) Zeichne eine Parallele zu (AA') durch B.
Diese schneidet g im gesuchten Bildpunkt B'.
Man nennt AA' die Abbildungsrichtung!

Die Strahlensatz-Rechnung oben ist der Beweis dafür, dass diese Konstruktion zum Ziel führt.

Konstruktionsbeispiel (2) (Abb. 5)

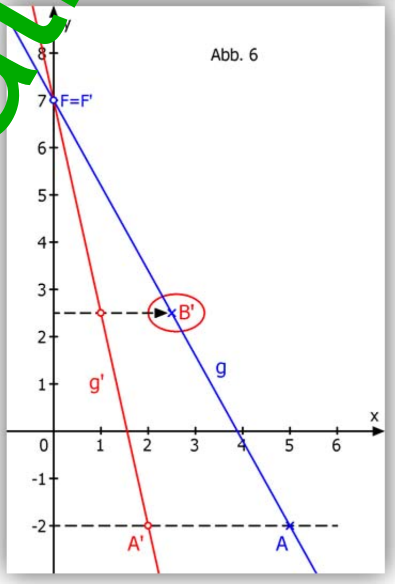
Gegeben sind das Punktepaar A und A' sowie das Urbild C (auf der anderen Seite wie A). Konstruiere C'.



Dieses Beispiel zeigt, dass man genauso vorgeht wie in Aufgabe (1), wenn die beiden Urbilder A und C auf verschiedenen Seiten der Streckachse liegen.

Konstruktionsbeispiel (3) (Abb. 6)

Gegeben sind der Punkt A und die Bildpunkte A' und B'. Konstruiere das Urbild B.



Konstruktionstext:

(1) Verbinde die Bildpunkte A' und B' zur Geraden g'.

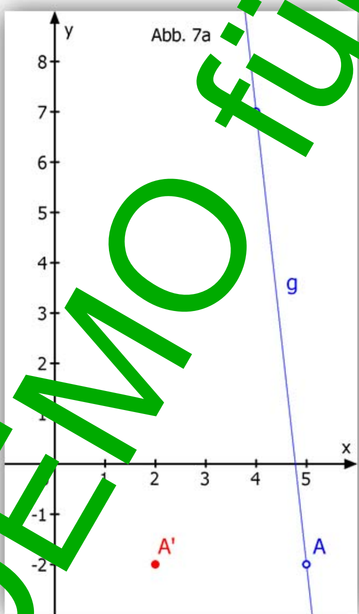
(2) g' schneidet die Streckachse im Fixpunkt F.

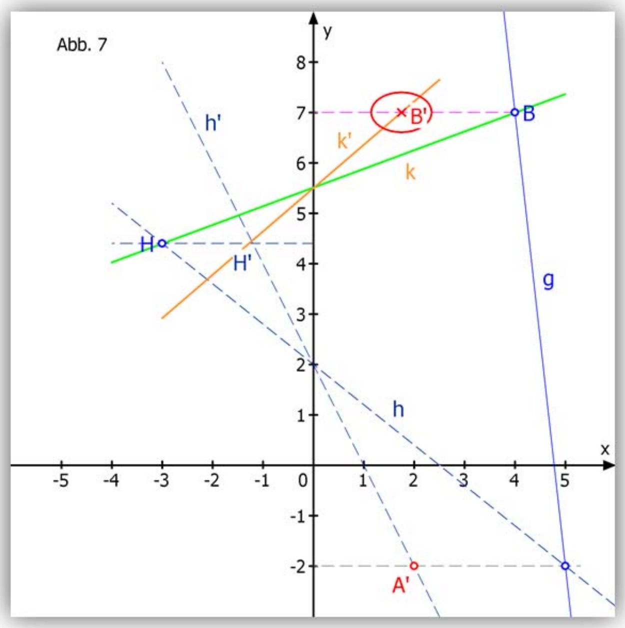
(3) Verbinde F und A zum Urbild g von g'.

(4) Zeichne eine Parallele zu (AA') durch B'.
Diese schneidet g im gesuchten Urbild B.

Konstruktionsbeispiel (4) (Abb. 7)

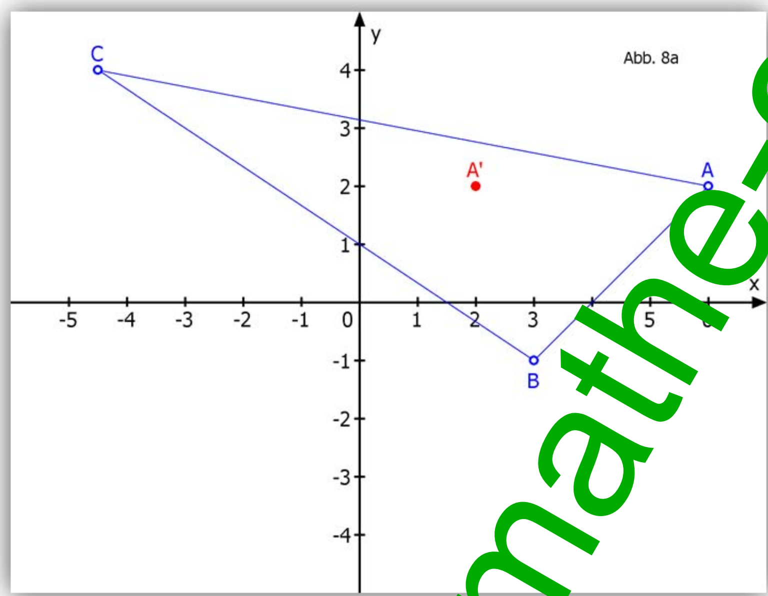
Es gibt den Sonderfall, dass die Gerade g = (AB) die Streckachse nicht schneidet, dass man also deren Fixpunkt F nicht zum Zeichnen ihrer Bildgerade hat, siehe Abb. 7a. Dann wählt man einen beliebigen Hilfspunkt H <u>auf der anderen Seite der Achse</u>, konstruiert mittels A uns A' dessen Bild H'. Jetzt kann man B' mittel H und H' konstruieren. Dies ist in Abb. 7b dargestellt.





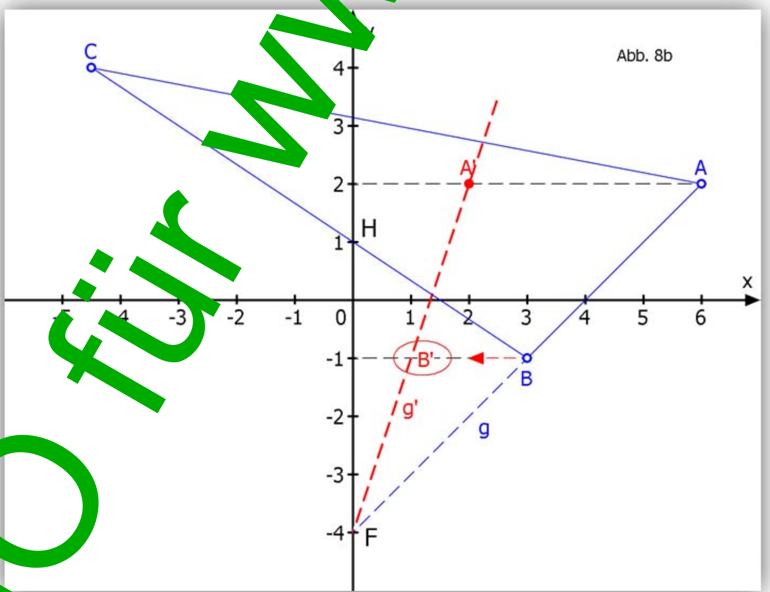
Konstruktionsbeispiel (5) (Abb. 8a und 8b)

Gegeben ist das Dreieck ABC sowie A', der Bildpunkt von A.
Konstruiere das Bilddreieck (also B' und C').



Die y-Achse ist die Streckachse, weil die Streckrichtung senkrecht dazu ist. Ferner ist $0 < k < 1$. $\left(k = \frac{2}{3}\right)$

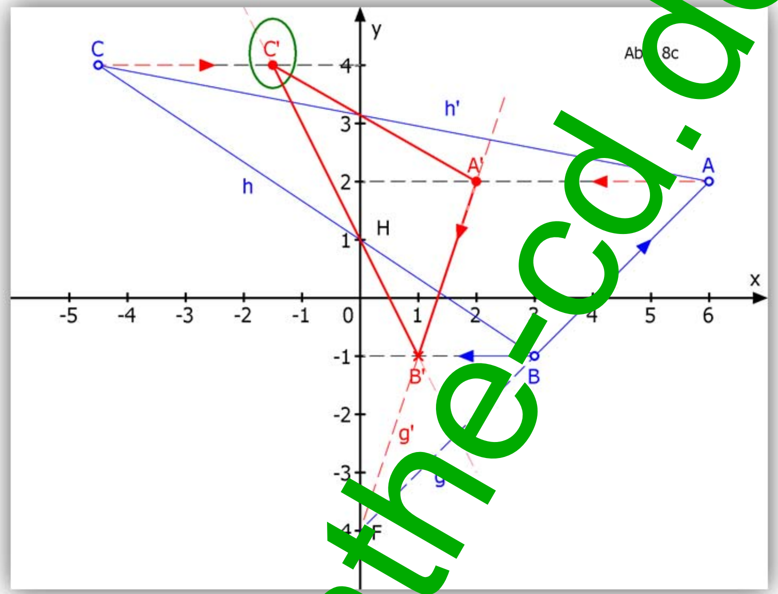
Zuerst wird B' ermittelt: Dazu zeichnet man die Gerade g = (AB). Sie schneidet die Streckachse im Fixpunkt F. Durch F und A' geht dann die Bildgerade g'. Die Streckrichtung ist senkrecht zur Streckachse, also parallel zur x-Achse. Man zeichnet also eine Parallele zu AA' durch B.
Im Schnittpunkt von g' und dieser Parallelen liegt dann B'.



Jetzt muss man C' finden. Dazu konstruiert zu h = (BC) die Bildgerade h'. Diese muss wie (BC) durch ihren Fixpunkt H gehen. Also ist $h' = (B'H)$.

Dann muss man diese Bildgerade $h' = (B'H)$ nur noch mit der Parallelen zu AA' bzw. BB' durch C schneiden und erhält C'. **Dies zeigt Abb. 8c**:

Hier die ganze Konstruktion:



Konstruktionsaufgaben:

Aufgabe 1

Gegeben sind A, B, C und A', konstruiere B' und C'.

a) $A(4|3)$, $B(1|1{,}5)$, $C(-3|4)$, $A'(4|5)$

b) $A(4|6)$, $B(-4|6)$, $C(-1|-3)$, $A'(4|4)$

Aufgabe 2

Gegeben sind A, B und A', konstruiere B'. **Hinweis:** Wähle einen geeigneten Hilfspunkt H.

$A(4|6)$, $B(-4|6)$, $C(-1|-3)$, $A'(4|4)$

Aufgabe 3

Gegeben ist das Bilddreieck A'B'C' durch $A'(4|5), B'(2|2), C'(-5|-2)$.
Konstruiere das Urdreieck, wenn A gegeben ist durch $A(-2|5)$